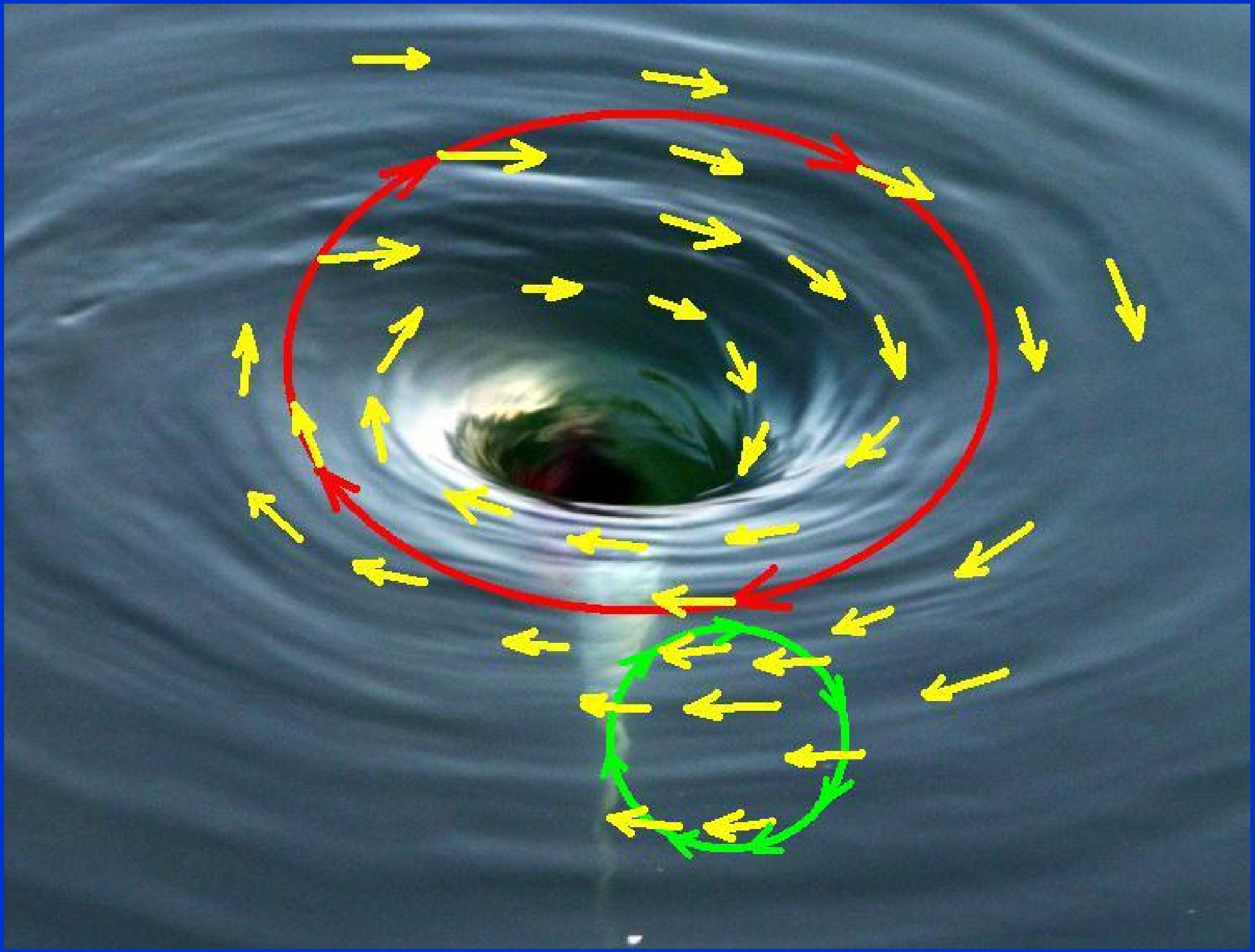
工程电磁场

王泽忠



环量说明图

1.5 矢量场的环量和旋度

1. 矢量场的环量

在矢量场中选取一闭合曲线 l

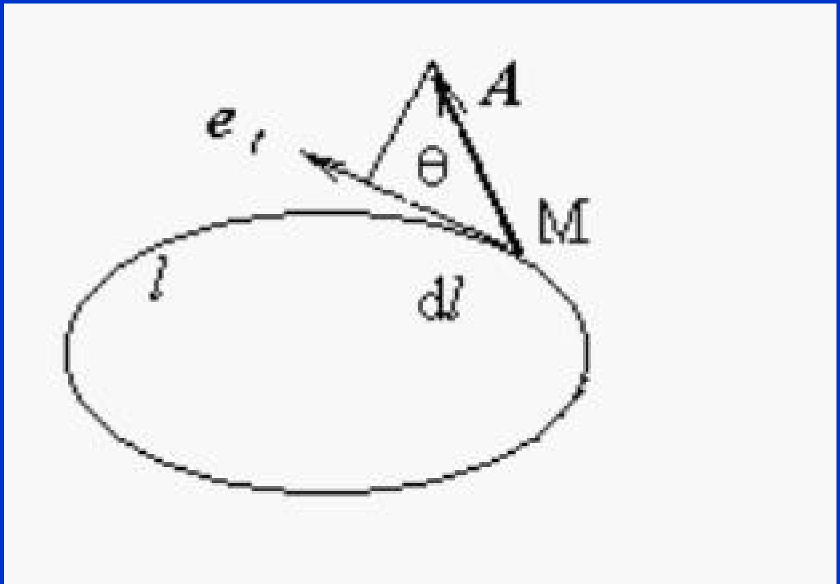
选定曲线的切线方向为曲线的正方向

在曲线 l 上任取一点 M，

过 M 点作切线方向，

单位矢量为 $\boldsymbol{e}_t$

取一弧元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，



矢量 $\boldsymbol{A}$（M） 沿有向闭合曲线 $\boldsymbol{l}$ 的线积分

$$\Gamma = \oint_l A_t \mathrm{d}l = \oint_l A\cos\theta \mathrm{d}l = \oint_l \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 按所取方向沿曲线 $\boldsymbol{l}$ 的环量

环量是描述矢量场特征的量，是一个标量

环量的数值不仅与场矢量 $\boldsymbol{A}$ 有关，

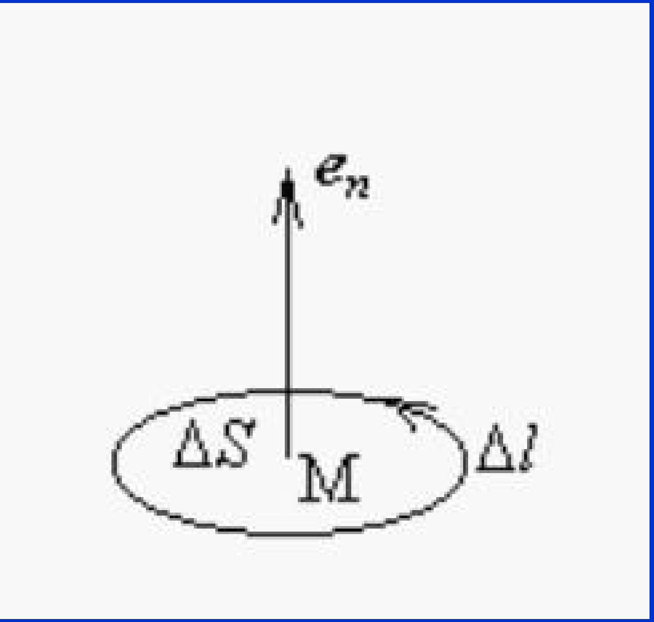
而且与回路 $\boldsymbol{l}$ 的形状和取向有关

Γ 表示的是场矢量沿 $\boldsymbol{l}$ 的总体旋转特性

要研究场矢量 $\boldsymbol{A}$ 在一点及其附近的性质？

将 $\boldsymbol{l}$ 收缩到一点，引入环量面密度的概念！

2．环量面密度



设 M 为矢量场中的一点，

在 M 点取一单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$，

在 M 点周围取闭合回路 Δl，

令环绕方向与 $\boldsymbol{e}_n$

构成右手螺旋关系；

作以 Δl 为边界，$\boldsymbol{e}_n$ 为法线方向，过 M 的小曲面 ΔS

当 ΔS 以任意方式收缩到 M 点时，　　怎么样？

若极限 $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$ 存在，

则称其为 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点沿方向 $\boldsymbol{e}_n$ 的环量面密度

若极限存在，则环量面密度与 $\boldsymbol{e}_n$ 有关，

与 Δl 的形状无关。

大小反映了 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点沿 $\boldsymbol{e}_n$ 方向旋转的强弱情况

它与取定的方向 $\boldsymbol{e}_n$ 有关。

在空间一点上，方向 e_n 可以任意选取，

随着 e_n 方向的改变，环量面密度将连续变化

在环量面密度最大的方向上，场矢量的旋转性最强

为表述这种特性，引入旋度的概念

3．旋度的定义

参考梯度的定义

梯度的方向是方向导数最大的方向，

梯度的模是最大方向导数的值，

梯度在一方向上的投影，即该方向的方向导数。

启示：找一矢量，它与环量面密度的关系，

正如梯度与方向导数的关系一样。

若在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一点 M 处存在矢量 $\boldsymbol{R}$，

它的方向是 $\boldsymbol{A}$ 在该点环量面密度最大的方向，

它的模就是这个最大的环量面密度，

则称矢量 $\boldsymbol{R}$ 为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 处的旋度，记为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

旋度矢量在数值和方向上表示了最大的环量面密度

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 方向的环量面密度即 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 上的投影

e_n 方向的环量面密度表示为

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

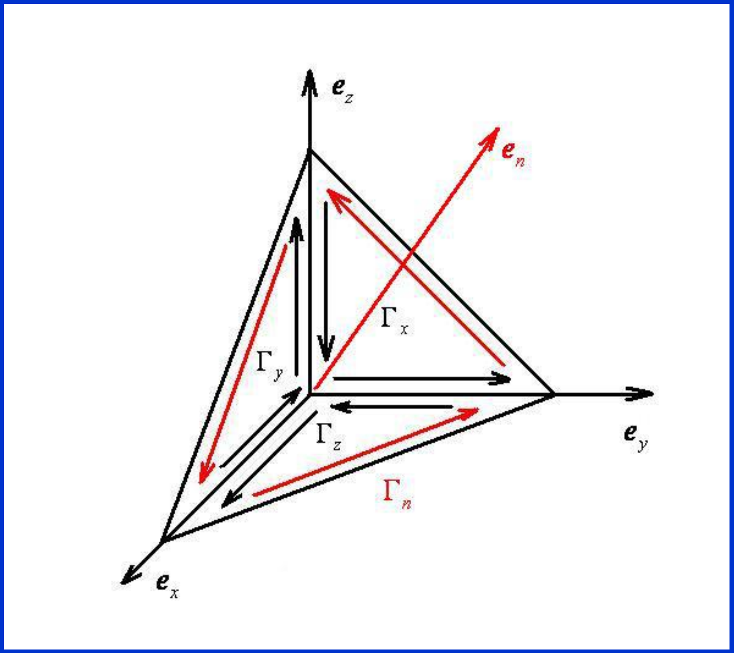
4．旋度的计算

环量面密度定义式中的极限

与所取小曲面边缘的形状无关

平行于 yoz 坐标平面的矩形面，

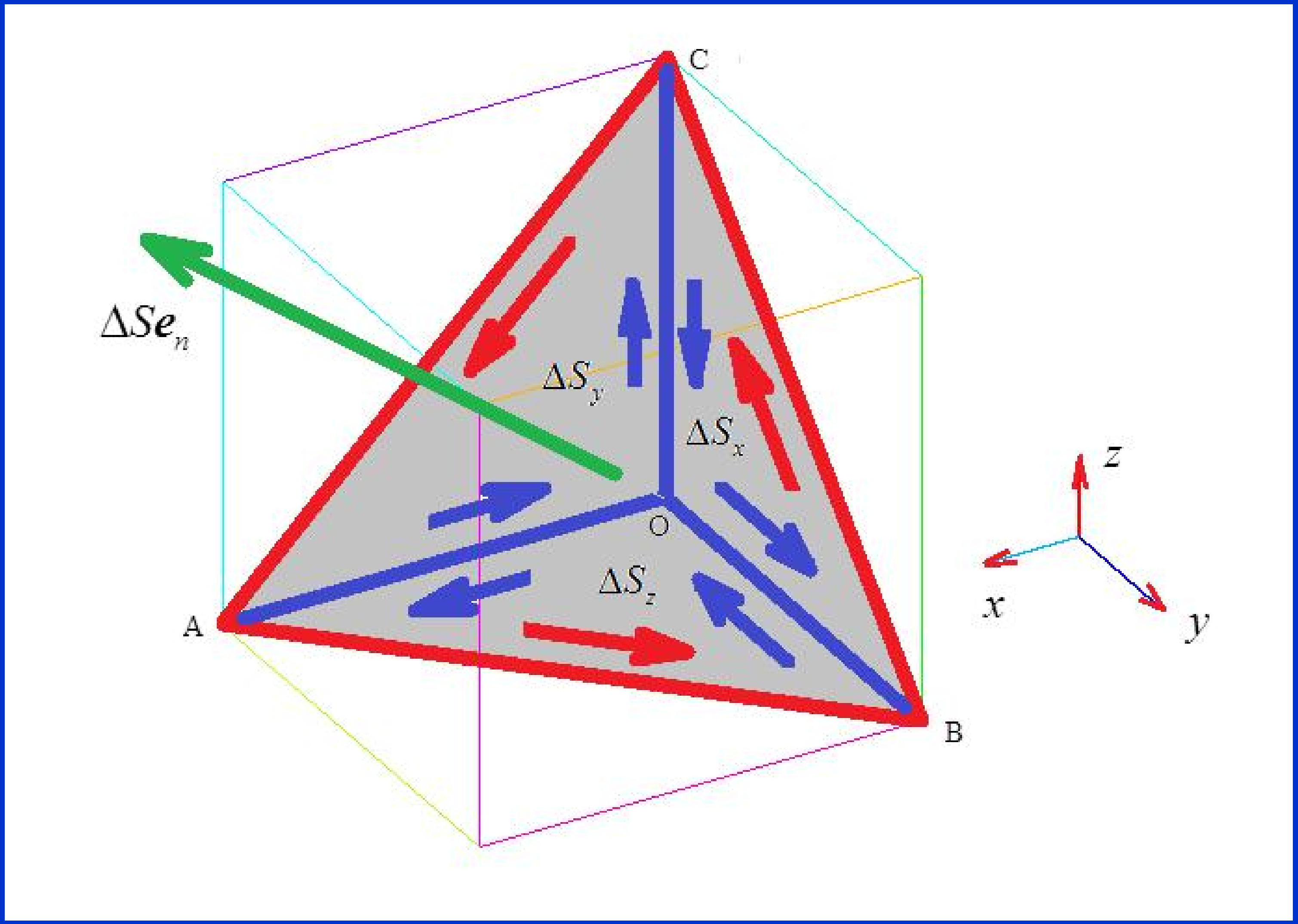
矩形面的法向矢量与 e_x 平行，



$$\Gamma_\mathrm{n} = \Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z$$

$$\frac{\Gamma_\mathrm{n}}{\Delta S} = \frac{\Gamma_x}{\Delta S_x}\frac{\Delta S_x}{\Delta S} + \frac{\Gamma_y}{\Delta S_y}\frac{\Delta S_y}{\Delta S} + \frac{\Gamma_z}{\Delta S_z}\frac{\Delta S_z}{\Delta S}$$

$$R_n = (R_x \boldsymbol{e}_x + R_y \boldsymbol{e}_y + R_z \boldsymbol{e}_z) \bullet \boldsymbol{e}_n$$


C
$\Delta S\boldsymbol{e}_n$
ΔS_y
ΔS_x
O
ΔS_z
A
B
z
x
y

小矩形面的面积为

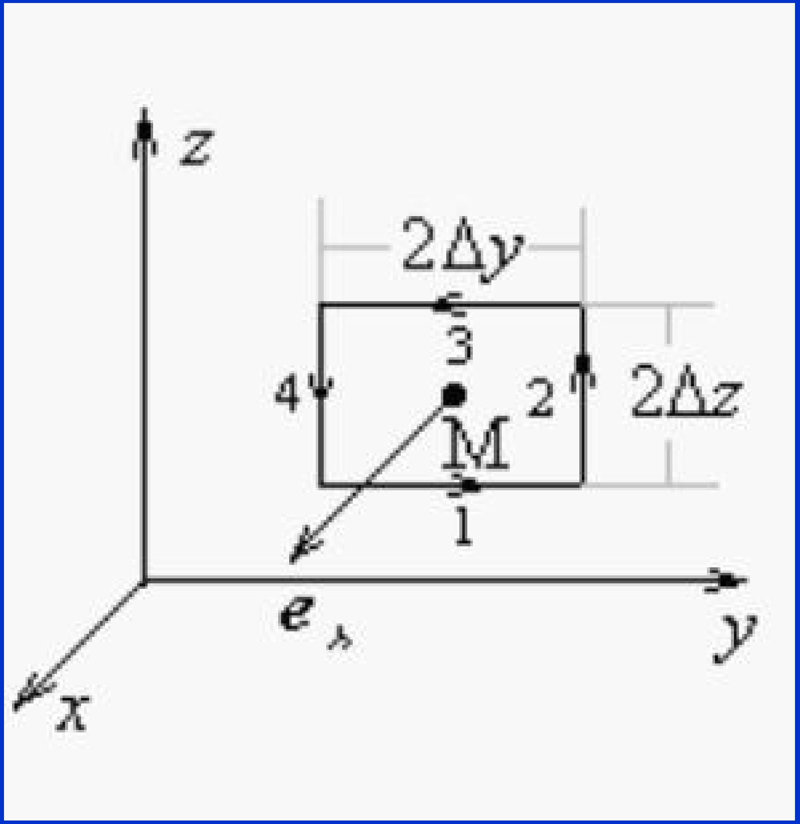
$$\Delta S_x = 4\Delta y\Delta z$$

以 M 点为中心，

在其周围

将 A 展开成泰勒级数

忽略高阶项， $\boxed{\text{可以？}}$



则 A 沿 Δl_x 的闭合线积分（Δl_x 沿逆时针方向）为

$$\oint_{\Delta l_x} \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_1 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_2 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_3 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_4 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) 2\Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) 2\Delta z$$

$$- \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) 2\Delta y - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) 2\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) 4\Delta y \Delta z$$

得

$$\mathrm{rot}_x \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint_{\Delta l_x} \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

取平行于 zox 坐标平面的小矩形面，

矩形面的法向矢量与 $\boldsymbol{e}_y$ 平行，

矩形面的面积为

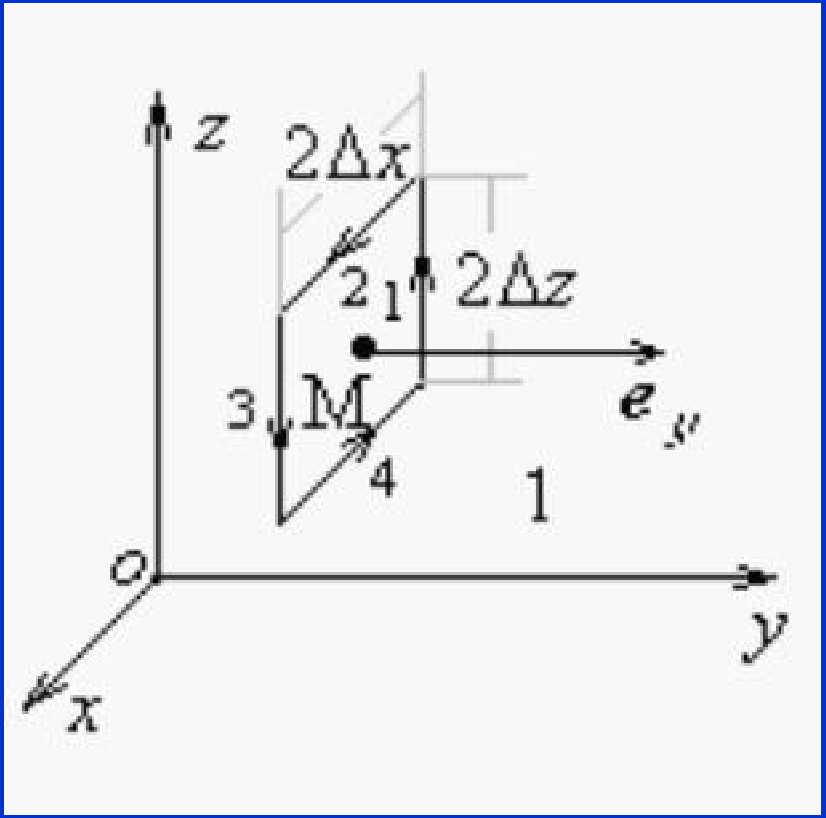
$$\Delta S_y = 4\Delta z\Delta x$$

将 $\boldsymbol{A}$ 展开成泰勒级数，

忽略高阶项，

则 $\boldsymbol{A}$ 沿 Δl_y 的线积分

如下



$$\oint_{\Delta l_y} \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_1 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_2 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_3 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_4 \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial x} \Delta x \right) 2\Delta z + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \Delta z \right) 2\Delta x$$

$$- \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \Delta x \right) 2\Delta z - \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial z} \Delta z \right) 2\Delta x$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) 4\Delta z \Delta x$$

得

$$\operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S_y \to 0} \frac{\oint_{\Delta l_y} \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

取平行于 xoy 坐标平面的小矩形面，

矩形面的法向矢量与 e_z 平行，

矩形面的面积为

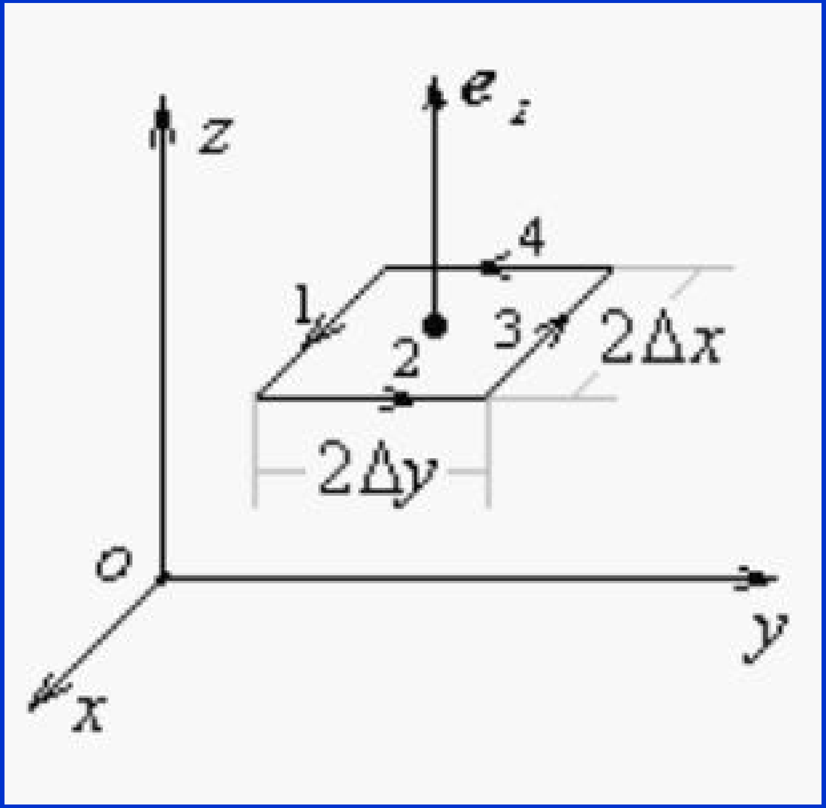
$$\Delta S_z = 4\Delta x \Delta y$$

将 A 展开成泰勒级数，

忽略高阶项，

则 A 沿 Δl_z 的线积分

如下



$$\oint_{\Delta l_z} \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_1 \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_2 \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_3 \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_4 \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \right) 2\Delta x + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \right) 2\Delta y$$

$$- \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \right) 2\Delta x - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \right) 2\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) 4\Delta x\Delta y$$

得

$$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S_z \to 0} \frac{\oint_{\Delta l_z} \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

综上所述，得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z$$

为便于记忆，写成行列式形式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

旋度运算是分析矢量场的工具

旋度是描述矢量场在任一点旋转性质的量

旋度是矢量，

其方向表示矢量场在该点环量面密度最大的方向，

其大小是最大的环量面密度。

矢量场中的每一点都对应着一个旋度矢量，

旋度矢量形成了一个新的矢量场，

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场。

旋度处处为零的场称为无旋场。

例：　已知 $\boldsymbol{A}=a(y\boldsymbol{e}_x-x\boldsymbol{e}_y)$，$a$ 为常数，求 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

解　$A_x=ay$，$A_y=-ax$，$A_z=0$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z$$

$$= (-a - a)\boldsymbol{e}_z = -2a\boldsymbol{e}_z$$

5．旋度的运算公式

设 C 为空间常数，u 为空间标量函数，

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为空间矢量函数，

根据导数运算规则，可到处旋度的运算规则：

1） $\mathrm{rot}(C\boldsymbol{A}) = C\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$

2） $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \pm \mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

3） $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A}) = u\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}u \times \boldsymbol{A}$

4） $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = 0$

5） $\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \bullet \mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

6） $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0$

公式 4)和公式 6)是非常重要的矢量恒等式！

可根据梯度、散度和旋度的计算公式直接证明！

6．斯托克斯定理

设矢量场

$$\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

分量 A_x, A_y, A_z 在空间区域中有一阶连续偏导数，

l 为曲面 S 的边界，

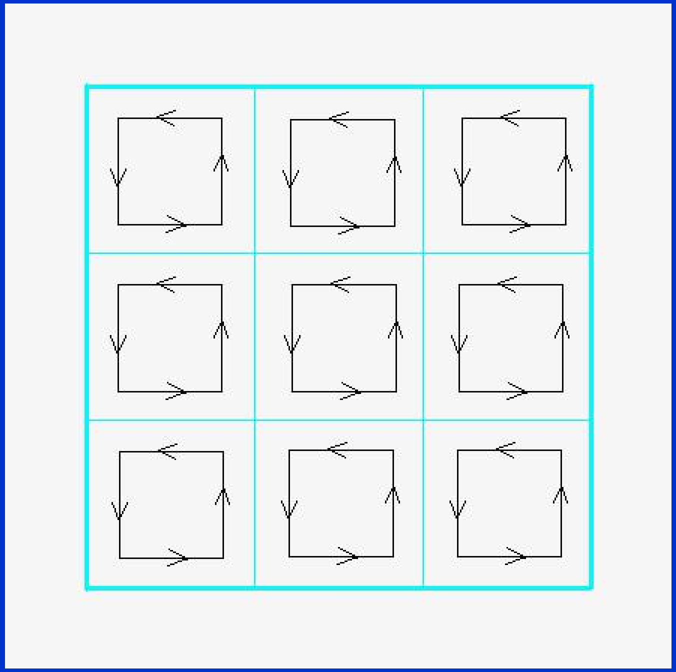
$\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 成右手螺旋关系，则

$$\oint_l \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

爱G.G. 斯托克斯

$$\oint_l A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



设想把曲面分成若干面积元

对每一个面积元，

沿闭合回路求 A 的环量，

取面积元闭合线的方向，

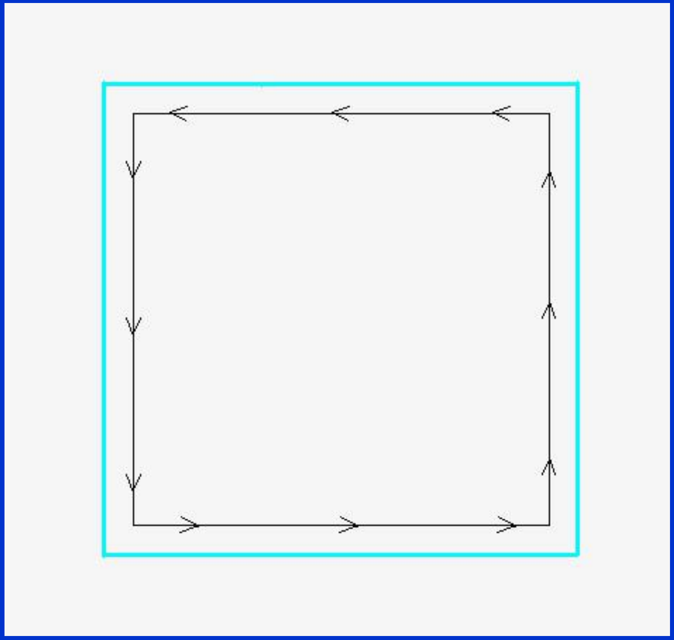
与外边界 l 的方向一致；

将所有面积元的闭合线积分相加（上图），

因为小回路公共边界上的积分路径方向彼此相反，

使得这部分积分互相抵消，（下图）

只有外边界积分剩余；



结果是：

所有沿小回路积分的总和

等于沿大回路 l 的积分

$$\oint_l \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

旋度在曲面法向的投影即法向的环量面密度

将此面密度进行面积分得曲面上的环量

而环量又可用矢量沿曲面边界的线积分表示

所以两积分相等！

斯托克斯定理表达

两种环量计算公式在一定条件下的等价关系！

斯托克斯定理在电磁场原理中得到广泛应用，

为电磁场理论的建立提供了数学基础。

旋度部分结束